

## Beispiel 5)

### Abell 21 (Planetarischer Nebel) mit einem SC-Teleskop und einer Monokamera mit 12 nm-Filter

Vorgehensweise: (ausführliche Informationen zu den Formeln sind dem Hauptdokument zu entnehmen)

- 1) Berechnung der Elektronen des Himmelshintergrunds mit folgender Formel:

$$S_H = N_0 * T * QE * \frac{1}{g} * \frac{\pi}{4} * D^2 * (1 - \varepsilon^2) * \left(206,2648 * \frac{P}{f}\right)^2 * \Delta\lambda * 10^{-0,4 * m_H}$$

wobei für  $m_H$  der Wert der Flächenhelligkeit der Lichtverschmutzung eingesetzt wird. Bei den Werten für das Himmelsleuchten von <https://www.lightpollutionmap.info>, durchquert das Licht nicht mehr die Atmosphäre (<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0108052>). Daher spielt in der Formel für  $T$  nur noch die Transmission der Optik eine Rolle.

Es werden hierbei für  $N_0$  die Werte des Frequenzbandes eingesetzt, bei denen der Filter besonders „effektiv“ ist.

Hell-Filter →  $N_0$  aus **B-Band** (dieses Mal nicht multipliziert mit 1,2, weil nur eine sehr schmale Bandbreite betrachtet wird)

H $\beta$ -Filter →  $N_0$  aus **B-Band** (dieses Mal nicht multipliziert mit 1,2, weil nur eine sehr schmale Bandbreite betrachtet wird)

OIII-Filter →  $N_0$  aus **V-Band**

HeI-Filter →  $N_0$  aus **R-Band**

H $\alpha$ -Filter →  $N_0$  aus **R-Band**

NII-Filter →  $N_0$  aus **R-Band**

SII-Filter →  $N_0$  aus **R-Band**

- 2) Berechnung der Objektelektronen mit folgender Formel:

$$S_P = \frac{F_\lambda}{A_{obj}} * T * QE * \frac{1}{g} * \frac{\pi}{4} * D^2 * (1 - \varepsilon^2) * \left(206,2648 * \frac{P}{f}\right)^2$$

Für einen Planetarischen Nebel werden die Photonenflüsse aus den Datenbanken verwendet (siehe Quellen am Ende dieses Dokuments) und über folgende Formeln in  $\frac{\text{Photonen}}{s \text{ cm}^2}$  umgerechnet:

$$F_\lambda = 10^X \left[ \frac{mW}{m^2} \right] = 10^X * \frac{1}{10^3} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$
$$F_\lambda \left[ \frac{\text{Photonen}}{cm^2 s} \right] = F_\lambda \left[ \frac{W}{m^2} \right] * \frac{\lambda}{h * c} * \frac{1}{10^4}$$

Die Photonenflüsse von H $\alpha$  und NII liegen so dicht beieinander, dass sie meist gleichzeitig von einem Schmalbandfilter (>4 nm) durchgelassen werden, was bei der Berechnung berücksichtigt werden muss.

- 3) Einsetzen der Elektronenzahl des Himmelhintergrunds von 1) in folgende Formel, um die Belichtungszeit für hintergrundlimitierte Aufnahmen zu ermitteln:

$$t_H = \frac{1}{\left(\frac{100 + E}{100}\right)^2 - 1} * \frac{R_A^2}{S_H}$$

- 4) Berechnung der benötigten Bilderanzahl für hintergrundlimitierte Aufnahmen und vorgegebenen SNR, wenn  $S_H$ ,  $S_P$  und  $t_H$  in folgende Formel eingesetzt werden:

$$N_P = SNR^2 * \frac{(S_P * t_H) + (S_H * t_H) + (S_D * t_H) + R_A^2}{S_P^2 * t_H^2}$$

- 5) Überprüfung, ob bei der verwendeten Verstärkung und hintergrundlimitierter Belichtungszeit die Full Well Capacity überschritten wurde:

$$S_{FWC} = (S_P + S_H + S_D) * t < FWC$$

Gegeben:

**Allgemeine Bedingungen:**

$$N_B = 13.402 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s nm}} \text{ (Beleuchtungsstärke von Vega im B-Band bei 436 nm)}$$

$$N_V = 10.052 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s nm}} \text{ (Beleuchtungsstärke von Vega im V-Band bei 545 nm)}$$

$$N_R = 7.187 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s nm}} \text{ (Beleuchtungsstärke von Vega im R-Band bei 641 nm)}$$

$$T_{\text{Atm\_H}\beta} = 0,711 \text{ (0,369 mag bei 486,1 nm bei einer Objekthöhe von } 60^\circ \text{ über dem Horizont)}$$

$$T_{\text{Atm\_OIII}} = 0,730 \text{ (0,341 mag bei 500,7 nm bei einer Objekthöhe von } 60^\circ \text{ über dem Horizont)}$$

$$T_{\text{Atm\_H}\alpha/\text{NII}} = 0,849 \text{ (0,178 mag bei 656,3 nm bzw. 658,4 nm bei einer Objekthöhe von } 60^\circ \text{ über dem Horizont)}$$

$$m_H = 20,5 \frac{\text{mag}}{\text{arcsec}^2} \text{ (Annahme: konstant über den gesamten Frequenzbereich)}$$

**Teleskop: 200/2000 Schmidt-Cassegrain**

$T = 0,615 (t_{\text{Linsenflächen}}^n * r_{\text{Spiegelflächen}}^n - \text{SC-Teleskop mit zwei Spiegelflächen mit einer Reflektivität von } r = 0,9, \text{ sechs Glasflächen mit einer Transmission } t=0,96 \text{ (ein Frontglasplatte, } 0,67 \times \text{Reducer, und ein Schutzglas vor dem Chip); ein Filter mit einer Gesamttransmission von } 97\%)$

$$\epsilon = 0,37 \text{ (37\% Obstruktion)}$$

$$D = 20 \text{ cm (200 mm Teleskopöffnung)}$$

$f = 1.500 \text{ mm (Meist sitzt bei einem SC noch ein Okularauszug dazwischen, so dass die reduzierende Brennweite von } 2.000 \text{ mm} * 0,67 = 1.340 \text{ mm nicht erreicht wird.)}$

**Kamera und Filter: ZWO ASI294MM Pro** (<https://www.zwoastro.com/product/asi294/>)

$QE_{H\beta} \approx 0,83$  (83% Quanteneffizienz im H $\beta$ -Bereich) (<http://www.astrosurf.com/buil/asi294mm.html>)

$QE_{OIII} \approx 0,84$  (84% Quanteneffizienz im OIII-Bereich) (<http://www.astrosurf.com/buil/asi294mm.html>)

$QE_{H\alpha} \approx 0,54$  (54% Quanteneffizienz im H $\alpha$ -Bereich) (<http://www.astrosurf.com/buil/asi294mm.html>)

$QE_{NII} \approx 0,54$  (54% Quanteneffizienz im NII-Bereich) (<http://www.astrosurf.com/buil/asi294mm.html>)

$P = 4,63 \mu\text{m}$

$g = 0,35 \frac{e^-}{ADU}$  (bei gain von 200)

$R_A = 1,8 e^-$  (RMS) (bei gain = 200)

$S_D = 0,019 \frac{e^-}{Pixel\ s}$  (bei 0°C)

$FWC = 3.800 e^-$  (bei gain = 200)

$\Delta\lambda = 12 \text{ nm}$  (für Himmel; wegen der Filterbandbreite des Schmalbandfilters)

**Objektdatei: Abell 21**

Scheinbare Größe: 10,25' x 10,25' (615" x 615")  $\rightarrow$  Fläche  $A_{obj}$ : 378.225 arcsec<sup>2</sup>

**Schritt 1) Berechnung der Elektronen des Himmelshintergrunds:  $\rightarrow T_{Atm}$  entfällt**

B-Band mit H $\beta$ -Filter: ( $\Delta\lambda = 12 \text{ nm}$ ) (wegen Filterdurchlassbereich ist QE leicht geändert gegenüber breitbandiger Beobachtung)

$$S_{H_{H\beta}} = 13.402 * 0,615 * 0,83 * \frac{1}{0,35} * \frac{\pi}{4} * 20^2 * (1 - 0,37^2) * \left(206,2648 * \frac{4,63}{1.500}\right)^2 * 12 * 10^{-0,4*20,5}$$
$$S_{H_{H\beta}} = 0,1626605 \frac{e^-}{Pixel\ s}$$

V-Band mit OIII-Filter: ( $\Delta\lambda = 12 \text{ nm}$ ) (wegen Filterdurchlassbereich ist QE leicht geändert gegenüber breitbandiger Beobachtung)

$$S_{H_{OIII}} = 10.052 * 0,615 * 0,84 * \frac{1}{0,35} * \frac{\pi}{4} * 20^2 * (1 - 0,37^2) * \left(206,2648 * \frac{4,63}{1.500}\right)^2 * 12 * 10^{-0,4*20,5}$$
$$S_{H_{OIII}} = 0,1234701 \frac{e^-}{Pixel\ s}$$

R-Band mit H $\alpha$ -Filter und NII-Filter: ( $\Delta\lambda = 12 \text{ nm}$ ) (wegen des Filterdurchlassbereichs ist die QE gegenüber breitbandigen Beobachtungen leicht geändert)

$$S_{H_{H\alpha/NII}} = 7.187 * 0,615 * 0,54 * \frac{1}{0,35} * \frac{\pi}{4} * 20^2 * (1 - 0,37^2) * \left(206,2648 * \frac{4,63}{1.500}\right)^2 * 12 * 10^{-0,4*20,5}$$
$$S_{H_{H\alpha/NII}} = 0,0567480 \frac{e^-}{Pixel\ s}$$

## Schritt 2) Berechnung der Objektelektronen:

Da Abell 21 aber auch im OIII-Bereich emittiert, muss auch die zweite Quelle hinzugezogen werden: ([http://www.eso.org/sci/libraries/historicaldocuments/Strasbourg-ESO\\_catalogue/Strasbourg-ESO\\_Catalogue\\_of\\_Galactical\\_Planetary\\_Nebulae\\_Part\\_II.pdf](http://www.eso.org/sci/libraries/historicaldocuments/Strasbourg-ESO_catalogue/Strasbourg-ESO_Catalogue_of_Galactical_Planetary_Nebulae_Part_II.pdf), Seite 450)

$$\log(F_{H\beta}) = -10,4 \pm 0,2 \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{H\beta} = 10^{-10,4} = 3,9810717 * 10^{-11} \frac{mW}{m^2}$$

Im Strasbourg-ESO-Katalog (European Southern Observatory) werden nun für H $\alpha$  der Wert 250, für OIII der Wert 147 und für NII der Wert 425 angegeben. Da H $\beta$  auf den Wert 100 normiert ist, heißt dies, dass die Leistungsdichte für H $\alpha$  um den Faktor 2,5, für OIII um den Faktor 1,47 und für NII um 4,25 höher liegt.

$$F_{OIII} = F_{H\beta} * 1,47 = 5,8521754 * 10^{-11} \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{H\alpha} = F_{H\beta} * 2,5 = 9,952679 * 10^{-11} \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{NII} = F_{H\beta} * 4,25 = 1,69196 * 10^{-10} \frac{mW}{m^2}$$

Für Abell 21 ist aus dem ersten Dokument (<https://arxiv.org/pdf/1211.2505>, Seite 29) der folgende Wert für H $\alpha$  angegeben:

$$\log(F_{H\alpha}) = -9,91 \pm 0,03 \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{H\alpha} = 10^{-9,91} = 1,23026877 * 10^{-10} \frac{mW}{m^2}$$

Die leicht unterschiedlichen Werte für H $\alpha$  zwischen den Dokumenten lassen sich durch den etwas größeren möglichen Abweichungsfehler von  $\pm 0,2 \frac{mW}{m^2}$  im ESO-Dokument erklären. Wird hier ein Wert von  $-10,3 \frac{mW}{m^2}$  (anstelle von  $-10,4 \frac{mW}{m^2}$ ) für H $\beta$  als Ausgangsbasis verwendet, ergibt das eine Photonenflussdichte von:

$$\log(F_{H\beta}) = -10,3 \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{H\beta} = 10^{-10,3} = 5,0118723 * 10^{-11} \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{H\alpha} = F_{H\beta} * 2,5 = 1,2529681 * 10^{-10} \frac{mW}{m^2}$$

Da der Wert  $\log(F_{H\beta}) = -10,3 \frac{mW}{m^2}$  eher dem Wert aus dem anderen Dokument entspricht, wird er auch für die OIII- und NII-Photonenflussdichte angewendet:

$$F_{OIII} = F_{H\beta} * 1,47 = 7,3674523 * 10^{-1} \frac{mW}{m^2}$$

$$F_{NII} = F_{H\beta} * 4,25 = 2,1300457 * 10^{-10} \frac{mW}{m^2}$$

Die Umrechnung in  $\left[\frac{\text{Photonen}}{cm^2 s}\right]$  ergibt folgende Werte:

$$F_{H\beta(486,1n)} = 5,0118723 * 10^{-14} \frac{W}{m^2} * \frac{4,861 * 10^{-7} m}{6,62607015 * 10^{-34} W s^2 * 299.792.458 \frac{m}{s}}$$

$$F_{H\beta} = 122.644,7292 \frac{\text{Photonen}}{m^2 s}$$

$$F_{H\beta} = 12,2644729 \frac{\text{Photonen}}{cm^2 s}$$

$$F_{OIII(500,7n)} = 7,3674523 * 10^{-1} \frac{W}{m^2} * \frac{5,007 * 10^{-7} m}{6,62607015 * 10^{-34} W s^2 * 299.792.458 \frac{m}{s}}$$

$$F_{OIII} = 185.702,6896 \frac{\text{Photonen}}{m^2 s}$$

$$F_{OIII} = 18,5702690 \frac{\text{Photonen}}{cm^2 s}$$

$$F_{H\alpha(656,3nm)} = 1,2529681 * 10^{-13} \frac{W}{m^2} * \frac{6,563 * 10^{-7} m}{6,62607015 * 10^{-34} W s^2 * 299.792.458 \frac{m}{s}}$$

$$F_{H\alpha(656,3nm)} = 413.966,9604 \frac{\text{Photonen}}{m^2 s}$$

$$F_{H\alpha(656,3nm)} = 41,3966960 \frac{\text{Photonen}}{cm^2 s}$$

$$F_{NII(656,3nm)} = 2,1300457 * 10^{-13} \frac{W}{m^2} * \frac{6,584 * 10^{-7} m}{6,62607015 * 10^{-34} W s^2 * 299.792.458 \frac{m}{s}}$$

$$F_{NII} = 705.995,6415 \frac{\text{Photonen}}{m^2 s}$$

$$F_{NII} = 70,5995642 \frac{\text{Photonen}}{cm^2 s}$$

Diese Werte können nun in die abgewandelte Form von Schroeders Gleichung eingesetzt werden.

H $\beta$ -Filter: ( $F_{OIII} = 12,2644729 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$ )

$$S_{P\_H\beta} = \frac{12,2644729}{378.225} * (0,711 * 0,615) * 0,83 * \frac{1}{0,35} * \frac{\pi}{4} * 20^2 * (1 - 0,37^2) * \left(206,2648 * \frac{4,63}{1.500}\right)^2$$

$$S_{P\_H\beta} = 0,0036975 \frac{e^-}{\text{Pixel s}}$$

OIII-Filter: ( $F_{OIII} = 18,5702690 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$ )

$$S_{P\_OIII} = \frac{18,5702690}{378.225} * (0,730 * 0,615) * 0,84 * \frac{1}{0,35} * \frac{\pi}{4} * 20^2 * (1 - 0,37^2) * \left(206,2648 * \frac{4,63}{1.500}\right)^2$$

$$S_{P\_OIII} = 0,0058186 \frac{e^-}{\text{Pixel s}}$$

H $\alpha$ -Filter: ( $F_{H\alpha} = 41,3967 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$ ;  $F_{H\alpha} = 70,5995642 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$  – Photonen von H $\alpha$  und NII gelangen durch den 12 nm H $\alpha$ -Filter)

$$S_{P\_H\alpha/NII} = \frac{41,3966960 + 70,5995642}{378.225} * (0,849 * 0,615) * 0,54 * \frac{1}{0,35} * \frac{\pi}{4} * 20^2 * (1 - 0,37^2) * \left(206,2648 * \frac{4,63}{1.500}\right)^2$$

$$S_{P\_H\alpha/NII} = 0,0262237 \frac{e^-}{\text{Pixel s}}$$

### Schritt 3) Berechnung der Belichtungszeit für hintergrundlimitierte Aufnahmen:

E = 5%

$$t_{H\_H\beta} = \frac{1}{\left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2 - 1} * \frac{1,8^2}{0,1626605} = 194,33 \text{ s}$$

$$t_{H\_OIII} = \frac{1}{\left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2 - 1} * \frac{1,8^2}{0,1234701} = 256,01 \text{ s}$$

$$t_{H\_H\alpha/NII} = \frac{1}{\left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2 - 1} * \frac{1,8^2}{0,0567480} = 557,02 \text{ s}$$

Die Belichtungszeit bei hintergrundlimitierten Aufnahmen gibt an, ab wann das Himmelsleuchten dominiert. Zu lange Belichtungszeiten führen beim Guiding mitunter zu Schwierigkeiten, oder es kommt bei sehr hellen Planetarischen Nebeln zur Sättigung der Pixel. Daher wird hier ein Faktor eingeführt, der bei Bedarf die Belichtungszeiten etwas reduziert:

$$t_{H_{H\beta}} = \frac{194,33 \text{ s}}{1} = 194,33 \text{ s}$$

$$t_{H_{OIII}} = \frac{256,01 \text{ s}}{1} = 256,01 \text{ s}$$

$$t_{H_{H\alpha/NII}} = \frac{557,02 \text{ s}}{2} = 278,51 \text{ s}$$

#### Schritt 4) Berechnung der benötigten Bilderanzahl für hintergrundlimitierte Aufnahmen:

$SNR_{H\beta} = 3$ ,  $SNR_{OIII} = 3$ ,  $SNR_{H\alpha/NII} = 10$

$$N_{P_{H\beta}} = 3^2 * \frac{(0,0036975 * 194,33) + (0,1626605 * 194,33) + (0,019 * 194,33) + 1,8^2}{0,0036975^2 * 194,33^2}$$

$N_{P_{H\beta}} = 684$  Aufnahmen mit einer Belichtungszeit von 194,33 s → 2.216,6 min oder 36,9 h

$$N_{P_{OIII}} = 3^2 * \frac{(0,0058186 * 256,01) + (0,1234701 * 256,01) + (0,019 * 256,01) + 1,8^2}{0,0058186^2 * 256,01^2}$$

$N_{P_{OIII}} = 167$  Aufnahmen mit einer Belichtungszeit von 256,01 s → 713,1 min oder 11,9 h

$$N_{P_{H\alpha/NII}} = 10^2 * \frac{(0,0262237 * 278,51) + (0,0567480 * 278,51) + (0,019 * 278,51) + 1,8^2}{0,0262237^2 * 278,51^2}$$

$N_{P_{H\alpha/NII}} = 59$  Aufnahmen mit einer Belichtungszeit von 278,51 s → 275,3 min oder 4,6 h

#### Schritt 5) Überprüfung der Full Well Capacity:

$$S_{FWC_{H\beta}} = (0,0058076 + 0,1626605 + 0,019) * 194,33 = 36,0 < FWC$$

$$S_{FWC_{OIII}} = (0,0091392 + 0,1234701 + 0,019) * 256,01 = 38,0 < FWC$$

$$S_{FWC_{H\alpha/NII}} = (0,0411888 + 0,0567480 + 0,019) * 278,51 = 28,4 < FWC$$

Datenbanken für die Photonenflüsse für Planetarische Nebel sind unter folgenden Angaben zu finden:

- In diesem Dokument (<https://arxiv.org/pdf/1211.2505>) werden sehr viele H $\alpha$ -Flusswerte von Planetarischen Nebeln angegeben, die auch online in der Vizier-Datenbank gesucht werden können:

(<https://vizier.cds.unistra.fr/viz-bin/VizieR-3?-source=J/MNRAS/431/2/fluxes&-out.max=50&-out.form=HTML%20Table&-out.add=r&-out.add=RAJ,DEJ&-sort=r&-oc.form=sexg>)

- Eine weitere Quelle für Photonenflüsse der unterschiedlichen Wellenlängen ist hier zu finden:

[http://www.eso.org/sci/libraries/historicaldocuments/Strasbourg-ESO\\_catalogue/Strasbourg-ESO\\_Catalogue\\_of\\_Galactical\\_Planetary\\_Nebulae\\_Part\\_I.pdf](http://www.eso.org/sci/libraries/historicaldocuments/Strasbourg-ESO_catalogue/Strasbourg-ESO_Catalogue_of_Galactical_Planetary_Nebulae_Part_I.pdf)

[http://www.eso.org/sci/libraries/historicaldocuments/Strasbourg-ESO\\_catalogue/Strasbourg-ESO\\_Catalogue\\_of\\_Galactical\\_Planetary\\_Nebulae\\_Part\\_II.pdf](http://www.eso.org/sci/libraries/historicaldocuments/Strasbourg-ESO_catalogue/Strasbourg-ESO_Catalogue_of_Galactical_Planetary_Nebulae_Part_II.pdf)

Auch diese sind online in der Vizier-Datenbank aufgelistet:

<https://vizier.cds.unistra.fr/viz-bin/VizieR-3?-source=V/84/hbeta>

<https://vizier.cds.unistra.fr/viz-bin/VizieR-3?-source=V/84/intens>

Dabei bildet die Photonenflussdichte einer Emissionslinie (meist H $\beta$  (486 nm), selten auch H $\alpha$  (656 nm)) die Bemessungsgrundlage und wird mit 100% normiert. Alle anderen Emissionslinien sind dann im Verhältnis von ganzen Zahlen zu dieser Emissionslinie angegeben.

- Unter

[https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/search/index.php#galactic\\_milky\\_way](https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/search/index.php#galactic_milky_way)

sind die Spektrallinien vieler Planetarischer Nebel grafisch dargestellt, und die

Photonenflüsse können in  $\left[ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ s } \text{\AA}} \right]$  abgelesen werden.